Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Finden Sie Funktionen f, $f_n \in \mathcal{L}^p$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ aber $f_n \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f$ μ-f.ü..

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und m das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \sin(nx) f(x) m(\mathrm{d}x).$$

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, seien $\mathcal{A}$-messbare Funktionen, so dass alle f_n (μ-f.ü.) nichtnegativ sind, und $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ im Maß μ. Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $p \in [1, \infty)$, und f_n, $n \in \mathbb{N}$, seien $\mathcal{A}$-messbare Funktionen auf Ω, für die eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ existiert mit $|f_n| \leqslant g$ μ-f.ü. für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun sei weiter f eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion auf Ω, so dass $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ im Maß μ gilt. Zeigen Sie, dass dann $f \in \mathcal{L}^p$ und $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$.